Санкт-Петербургский государственный университет
Факультет прикладной математики – процессов управления
Кафедра теории управления

Горбачук Анна Дмитриевна

Выпускная квалификационная работа бакалавра

МЕТОДЫ АНАЛИЗА УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ПОСТОЯННЫМ И ЛИНЕЙНО ВОЗРАСТАЮЩИМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Прикладная математика и информатика

Научный руководитель:
заслуженный работник ВШРФ,
доктор физ.-мат. наук, профессор,
заведующий кафедрой теории управления
Жабко А. П.

Санкт-Петербург
2018

Содержание

Введение

В настоящее время область приложений дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом заметно расширяется. Системы таких уравнений позволяют моделировать динамические процессы в различных областях физики, техники, биологии, медицины, экономики, экологии.

Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом — дифференциальные уравнения, в которые неизвестная функция входит при различных аргументах. Такие уравнения можно разделить на три типа: уравнения с запаздывающим аргументом, уравнения с опережающим аргументом и уравнения нейтрального типа. С основами теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом можно познакомиться в работах [1, 2].

В настоящей работе рассматриваются линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом, описывающие процессы, в которых скорость изменения в любой момент времени зависит от предыдущих состояний, а не только от текущего состояния.

Для дифференциальных уравнений существует несколько методов анализа устойчивости. Два основных подхода были разработаны Ляпуновым А. М., они известны как первый и второй (прямой) методы Ляпунова.

Под вторым методом Ляпунова понимают совокупность приемов и средств исследования устойчивости решений систем дифференциальных уравнений при помощи специальных функций Ляпунова. Для систем вида $\dot{x} = Ax$, где $x \in \mathbb{R}^n$, A — постоянная матрица, известен критерий: система экспоненциально устойчива тогда и только тогда, когда существует положительно-определенная квадратичная форма (функция Ляпунова), производная которой вдоль решений данной системы представляет собой отрицательно-определенную квадратичную форму.

Существуют обобщения второго метода Ляпунова на системы с запаздыванием. Данная работа будет основана на одном из таких методов — методе Красовского Н. Н.. В силу того, что состояние линейной системы с запаздыванием — это сегмент траектории, а не значение в текущий момент времени, то функции Ляпунова Красовский заменяет функционалами, зависящими от сегмента траектории. Именно эти функционалы, используемые для анализа экспоненциальной устойчивости, в дальнейшем получили название функционалов Ляпунова–Красовского.

Для систем с запаздыванием доказаны теоремы, аналогичные теоремам Ляпунова. Эти теоремы основаны на анализе расположения нулей характеристического квазиполинома на комплексной плоскости. Отрицательность действительных частей всех его нулей — необходимое и достаточное условие экспоненциальной устойчивости системы [1].

Существует аналог критерия Ляпунова для линейных стационарных систем с запаздыванием. Он известен как теорема Красовского: пусть существует положительно-определенный функционал, допускающий квадратичные оценки, производная которого вдоль решений системы представляет собой отрицательно-определенный функционал, тогда система является экспоненциально устойчивой.

Ставится вопрос о нахождении функционала, позволяющего исследовать экспоненциальную устойчивость системы с запаздыванием. Существует ли такой функционал? Если существует, как его построить? Является ли он единственным, и как определить его положительную определенность?

Известны способы построения положительно-определенных функционалов с заданной отрицательно-определенной производной, которые, согласно теореме Красовского, пригодны для анализа устойчивости [5]. Один из таких функционалов — функционал полного типа, который допускает квадратичную оценку снизу в случае экспоненциальной устойчивости системы.

Важным элементом, определяющим такие функционалы, является матрица Ляпунова. Для нее установлено необходимое и достаточное условие единственности [6]. В данной работе остановимся на вычислении матрицы Ляпунова для линейных дифференциальных уравнений с постоянным запаздыванием. По определению эта матрица является решением специальной системы уравнений, в которую входят некоторое условие симметрии, дифференциально-разностное уравнение и граничное условие. Причем матрица Ляпунова существует и единственна.

В данной работе рассмотрены методы проверки положительной определенности функционалов, которые пригодны для анализа экспоненциальной устойчивости для линейных дифференциальных систем с постоянным запаздыванием. Существует несколько таких методов, мы же сосредоточились на подходе, приведенном в [3].

Заметим, что не во всех случаях можно считать запаздывание постоянным и ограниченным, поэтому появляется необходимость в рассмотрении дифференциальных уравнений с переменным запаздыванием. На рисунке 1 представлены модели, которые описываются уравнениями с линейно возрастающим запаздыванием. Такие уравнения требуют особого внимания, так как в отличие от уравнений с ограниченным переменным запаздыванием, предыстория их решения, влияющая на последующую динамику, неограниченно возрастает при увеличении времени.

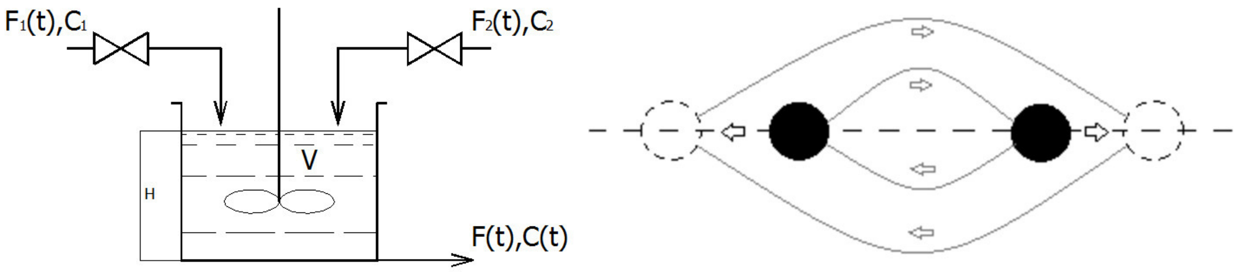

Рис. 1: Динамические модели с линейно возрастающим запаздыванием

Первая модель (слева) — модель смесительного бака, который наполняется разными жидкостями с помощью двух труб. Жидкости втекают с массовыми скоростями $F_1(t)$ и $F_2(t)$. В обоих потоках содержится некоторое растворимое вещество с постоянными концентрациями C_1 и C_2. А из нижней части бака вытекает полученная смесь с массовой скоростью $F(t)$ и концентрацией $C(t)$.

Вторая модель (справа) — модель обменивающихся между собой информацией и удаляющихся друг от друга объектов. В данном случае присутствует транспортное запаздывание — время, необходимое для передачи информации между объектами, причем это время линейно возрастает при увеличении расстояния между объектами.

Существуют модели, при описании которых появляется не только линейно возрастающее запаздывание, но и постоянное. Примером такой модели является модель динамики транспортного потока на КАД («Ring road traffic»). Эта модель подробно рассмотрена в работе [4], но без учета постоянного запаздывания. В данной работе рассмотрена дифференциальная система, описывающая модель динамики транспортного потока на КАД с учетом постоянного запаздывания.

Вопрос распространения метода Ляпунова на линейные системы с постоянным запаздыванием рассмотрен в [5, 6], а распространение метода на системы с линейно возрастающим запаздыванием — в [9]. В настоящей работе представлено распространение метода функционалов на линейные системы с постоянным и линейно возрастающим запаздываниями.

Постановка задачи

В первой главе будем рассматривать системы с запаздывающим аргументом вида

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=0}^{m} A_j x(t - h_j), \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$; $A_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $j = 0 \ldots m$ — постоянные матрицы коэффициентов, а запаздывания расположены в порядке возрастания $0 = h_0 < \ldots < h_m = h$.

Каждое решение системы (1) определяется начальными условиями: начальным моментом t_0 и начальной вектор-функцией $\varphi(\theta)$, $\theta \in [t_0 - h, t_0]$. В дальнейшем будем считать, что $t_0 = 0$, а начальные функции являются кусочно-непрерывными на промежутке $[-h, 0]$. Решение системы (1) с начальной вектор-функцией $\varphi(\theta)$ будем обозначать через $x(t, \varphi)$, а сегмент траектории $x(t, \varphi)$ на промежутке $[t-h, t]$ через $x_t = \{x(\xi, \varphi) \mid \xi \in [t-h, t]\}$.

Под устойчивостью системы (1) будем понимать её экспоненциальную устойчивость.

В данной работе будем рассматривать методы анализа положительной определённости функционалов, пригодных для анализа экспоненциальной устойчивости системы (1).

Для системы (1) метод функционалов основывается на следующей теореме Н. Н. Красовского.

Теорема [5]. Пусть известен функционал $\upsilon(x_t)$, удовлетворяющий следующим условиям:
1) существуют $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$ такие, что

$$\alpha_1 \|x(t)\|^2 \leqslant \upsilon(x_t) \leqslant \alpha_2 \|x_t\|_h^2, \quad t \geqslant 0;$$

2) существует $\beta > 0$ такое, что вдоль любого решения системы (1) выполняется

$$\frac{dv(x_t)}{dt} \leqslant -\beta\|x(t)\|^2, \quad t \geqslant 0.$$

Тогда система (1) является асимптотически устойчивой.

З а м е ч а н и е 1. Для систем вида (1) понятия асимптотической устойчивости и экспоненциальной устойчивости эквивалентны.

З а м е ч а н и е 2. Второе условие теоремы можно переписать так: существует положительно-определенная функция $\omega(x)$ такая, что

$$\frac{dv(x_t)}{dt} \leqslant -\omega(x(t)), \quad t \geqslant 0$$

вдоль решений системы (1).

В отличие от Красовского Н. Н., применявшего функционалы, Разумихин Б. С. рассмотрел возможность исследования устойчивости систем с запаздыванием при помощи функций (функций Ляпунова). Он установил, что достаточно исследовать отрицательную определенность производной функции Ляпунова не на множестве решений системы, а на специальном множестве функций.

В качестве функции Ляпунова в работе [11] Разумихин рассмотрел скалярную функцию $V(x)$, определенную и непрерывно дифференцируемую на множестве векторов $x \in \mathbb{R}^n$ таких, что $\|x\| < H$, где $H > 0$. А специальное множество, на котором исследована отрицательная определенность $\left.\frac{dV(x(t)}{dt}\right|_{(1)}$, имеет вид

$$S_V = \left\{x(t+\theta) : V(x(t+\theta)) \leqslant \rho(V(x(t)))\right\},$$

где $\theta \in [-h, 0]$, ρ — непрерывная неубывающая скалярная функция такая, что $\rho(0) = 0$ и $\rho(s) > s$ при $s > 0$.

Условием Разумихина названо неравенство, которому удовлетворяют функции $x(t+\theta)$ из множества S_V.

Используем подход, который основан на методе функционалов Ляпунова – Красовского с применением идеи метода Разумихина: рассматриваем положительную определенность функционалов на множестве функций, удовлетворяющих условиям, аналогичным условиям Разумихина, а не на множестве всех кусочно-непрерывных функций.

В качестве аналога множества функций, удовлетворяющих условию Разумихина, рассмотрим множество кусочно-непрерывных функций

$$S = \left\{ x_t : x^2(t+\theta) \leqslant x^2(t), \quad \forall \theta \in [-h, 0] \right\}.$$

Теорема 1 [3]. Пусть система (1) экспоненциально устойчива по Ляпунову. Тогда для любой положительно-определенной матрицы $W_{n\times n}$ существует функционал $\upsilon_0(x_t)$ такой, что

1) $\left.\frac{d\upsilon_0(x_t)}{dt}\right|_{(1)} = -x^T(t)Wx(t)$;
2) $\exists\ \mu > 0$ такое, что $\upsilon_0(x_t) \geqslant \mu\|x(t)\|^2$ при $x_t \in S$.

З а м е ч а н и е 3. Предполагаем, что начальная функция $\varphi(\theta) \in S$.

Теорема 1 останется верной, если в ней множество S заменить на множество p раз непрерывно-дифференцируемых функций ($p = 0, 1, 2...$)

$$S_p = \left\{ x_t : \|x^{(p)}(t+\theta)\| \leqslant \left(\sum_{j=0}^{m} \|A_j\| \right)^p \|x(t)\|, \quad \theta \in [-h, 0] \right\}.$$

Существует аналог теоремы 1 для функционала полного типа. Положим, что $\omega(x_t)$ — положительно-определённый функционал, тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 1' [3]. Пусть система (1) экспоненциально устойчива. Тогда для любых положительно-определенных матриц $W_0, W_1, ..., W_{2m}$ существует функционал $\upsilon(x_t)$ такой, что

1) $\left.\frac{d\upsilon(x_t)}{dt}\right|_{(1)} = -\omega(x_t)$;
2) $\exists\ \mu > 0$ такое, что $\upsilon(x_t) \geqslant \mu\|x(t)\|^2$ при $x_t \in S$.

Рассмотрим обратные утверждения теорем 1 и 1'.

Теорема 2 [3]. Пусть существует функционал $\upsilon(x_t)$ такой, что

1) $\left.\frac{d\upsilon(x_t)}{dt}\right|_{(1)} = -x^T(t)Wx(t)$, где матрица W положительно определена;
2) $\upsilon(x_t) \geqslant c_1\|x(t)\|^2$ при $x_t \in S_p$ при некоторых $p \geqslant 0$, $c_1 > 0$.

Тогда система (1) экспоненциально устойчива по Ляпунову.

Теорема 2' [3]. Пусть существует функционал $\upsilon(x_t)$ такой, что

1) $\frac{d\upsilon(x_t)}{dt}\Big|_{(1)} = -\omega(x_t)$, где матрицы $W_0, W_1, ..., W_{2m}$ положительно определены;

2) $\upsilon(x_t) \geqslant c_1 \|x(t)\|^2$ при $x_t \in S_p$ при некоторых $p \geqslant 0, c_1 > 0$.

Тогда система(1) экспоненциально устойчива по Ляпунову.

Для того, чтобы избежать громоздких формул, в первой главе будем рассматривать подход, описанный выше, для скалярных уравнений с одним запаздыванием вида

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bx(t-h). \tag{2}$$

Здесь a, b — постоянные коэффициенты, $h > 0$ — постоянное запаздывание.

Во второй главе будем рассматривать системы следующего вида

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-h) + Cx(\alpha t), \tag{3}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор фазовых состояний; A, B, C — вещественные, постоянные $(n \times n)$-матрицы коэффициентов; параметр α удовлетворяет условию $0 < \alpha < 1$; $h > 0$ — постоянное запаздывание.

Каждое решение системы (3) определяется начальными условиями: начальным моментом t_0 и начальной непрерывной вектор-функцией

$$\varphi : [\alpha t_0, t_0] \to R, \quad \varphi(t_0) = x_0, \quad t_0 > 0. \tag{4}$$

Далее будем считать, что $h \leqslant (1-\alpha)t_0$.

Решение системы (3) с начальными данными t_0, φ будем обозначать через $x(t, t_0, \varphi)$, а сегмент траектории $x(s, t_0, \varphi)$ на промежутке $s \in [t, \alpha^{-1}t]$ при $t \geqslant t_0$ — через x_t.

В работах [5, 6] рассмотрен вопрос о построении функционалов Ляпунова для линейных систем с постоянным запаздыванием ($C = 0$). В работе [9] аналогичные функционалы построены для систем с линейно возрастающим запаздыванием ($B = 0$). Известно, что при построении функционалов Ляпунова ключевую роль играют матрицы Ляпунова, которые предложено определять через систему линейных матричных уравнений без запаздывания. Во второй главе представлено распространение метода функционалов на линейные системы с постоянным и линейно возрастающим запаздываниями.

Глава 1. Линейные дифференциальные системы с постоянным запаздыванием

Рассмотрим систему с запаздывающим аргументом вида

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=0}^{m} A_j x(t - h_j). \tag{1.1}$$

Введем несколько основных понятий. Далее в качестве векторной нормы будем использовать евклидову норму, а для векторных функций — равномерную норму $\|\varphi\|_h = \sup\limits_{\theta \in [-h,0]} \|\varphi(\theta)\|$.

Функционалом $v(\varphi)$ будем считать отображение пространства кусочно-непрерывных функций $\varphi : [-h, 0] \to \mathbb{R}^n$ в пространство $\mathbb{R}^n$.

О п р е д е л е н и е 1 [11]. Функционал $v(\varphi)$ называется непрерывным, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $|v(\varphi)| < \varepsilon$ при $\|\varphi\|_h < \delta$.

О п р е д е л е н и е 2. Пусть функционал $v(\varphi)$ такой, что $v(0_h) = 0$, непрерывен в нуле и определен на множестве кусочно-непрерывных функций φ таких, что $\|\varphi\|_h \leqslant H$, где $H > 0$. Тогда функционал $v(\varphi)$ положительно определен, если существует $v_1(x)$ — положительно-определенная функция такая, что $v(\varphi) \geqslant v_1(\varphi(0))$, где $\varphi : [-h, 0] \to \mathbb{R}^n$.

О п р е д е л е н и е 3. Система (1.1) называется экспоненциально устойчивой, если существуют $\gamma \geqslant 1$, $\sigma > 0$ такие, что для любого решения этой системы справедливо неравенство

$$\|x(t, \varphi)\| \leqslant \gamma e^{-\sigma t} \|\varphi\|_h, \quad t \geqslant 0.$$

Характеристическое уравнение системы (1.1) имеет вид

$$det\left(\lambda E - \sum_{j=0}^{m} A_j e^{-\lambda h_j}\right) = 0. \tag{1.2}$$

Функция, стоящая в левой части этого уравнения, называется характеристическим квазиполиномом. Корни уравнения (1.2) — характеристические числа системы (1.1).

Будем говорить, что система (1.1) удовлетворяет условию Ляпунова, если она не имеет собственного числа λ такого, что $-\lambda$ также является ее характеристическим (собственным) числом.

1.1. Фундаментальная матрица и её свойства

При построении решения системы (1.1) важную роль играет фундаментальная матрица.

Рассмотрим фундаментальную матрицу $K(t)$ системы (1.1). Эта матрица является решением матричного уравнения

$$\frac{dK(t)}{dt} = \sum_{j=0}^{m} K(t-h_j)A_j, \quad t \geqslant 0$$

с начальным условием

$$K(\theta) = \begin{cases} E_{n\times n}, & \theta = 0, \\ 0_{n\times n}, & \theta \in [-h, 0). \end{cases}$$

Матрица $K(t)$ существует и единственна, так как система (1.1) удовлетворяет условиям теоремы о существовании и единственности решения. Каждый столбец матрицы $K(t)$ — решение системы (1.1) с соответствующей кусочно-непрерывной начальной функцией. Фундаментальная матрица в скалярном случае называется фундаментальным решением.

Применив преобразование Лапласа, нетрудно убедиться, что

$$K(t) \equiv \tilde{K}(t),$$

где $\tilde{K}(t)$ является решением системы

$$\frac{d\tilde{K}(t)}{dt} = \sum_{j=0}^{m} A_j\tilde{K}(t-h_j), \quad t \geqslant 0$$

с начальным условием

$$\tilde{K}(\theta) = \begin{cases} E_{n\times n}, & \theta = 0, \\ 0_{n\times n}, & \theta \in [-h, 0). \end{cases}$$

Лемма 1 [2]. Решение $x(t, \varphi)$ системы (1.1) можно представить в виде формулы Коши

$$x(t, \varphi) = K(t)\varphi(0) + \sum_{j=1}^{m} \int_{-h_j}^{0} K(t - \theta - h_j) A_j \varphi(\theta) d\theta, \quad t \geqslant 0. \tag{1.3}$$

Если начальная вектор-функция $\varphi(\theta)$ задана таким образом, что

$$\varphi(\theta) = \begin{cases} \varphi(0), & \theta = 0, \\ 0, & \theta \in [-h, 0), \end{cases}$$

то решение системы представляется в виде $x(t, \varphi) = K(t)\varphi(0)$.

1.2. Функционалы полного типа

В этом разделе приведены основные результаты работы [5].

Будем искать функционал, удовлетворяющий теореме Красовского, начиная со второго условия теоремы.

Зададим квадратичную форму $\omega_0(x) = x^T W x$ и построим функционал $v_0(x_t)$, удовлетворяющий соотношению

$$\frac{dv_0(x_t)}{dt} = -\omega_0(x(t)), \quad t \geqslant 0 \tag{1.4}$$

вдоль решений системы (1.1). Если система (1.1) экспоненциально устойчива по Ляпунову, искомый функционал будет иметь вид

$$v_0(\varphi) = \int_0^{\infty} \omega_0(x(t, \varphi)) dt = \int_0^{\infty} x^T(t, \varphi) W x(t, \varphi) dt.$$

Воспользовавшись формулой представления решения в форме Коши (1.3), получим

$$\upsilon_0(x_t) = x^T(t)U(0)x(t) + 2x^T(t)\sum_{j=1}^{m}\int\limits_{-h_j}^{0} U(-\theta - h_j)A_j x(t+\theta)d\theta +$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\int\limits_{-h_k}^{0} x^T(t+\theta_1)A_k^T\left[\int\limits_{-h_j}^{0} U(\theta_1 + h_k - \theta_2 - h_j)A_j x(t+\theta_2)d\theta_2\right]d\theta_1. \tag{1.5}$$

Здесь

$$U(\tau) = \int\limits_{0}^{\infty} K^T(t)WK(t+\tau)dt \tag{1.6}$$

— матрица Ляпунова для системы (1.1), ассоциированная с матрицей W. Матрица Ляпунова играет ключевую роль в построении функционала. Если эта матрица известна, то производная функционала (1.5) вдоль решения системы (1.1) удовлетворяет соотношению (1.4).

Теперь рассмотрим функционал

$$\omega(x_t) = x^T(t)W_0x(t) + \sum_{j=1}^{m} x^T(t-h_j)W_jx(t-h_j) +$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\int\limits_{-h_j}^{0} x^T(t+\theta)W_{m+j}x(t+\theta)d\theta \tag{1.7}$$

и поставим задачу нахождения функционала $\upsilon(x_t)$, производная которого вдоль решений системы (1.1)

$$\frac{d\upsilon(x_t)}{dt} = -\omega(x_t), \quad t \geqslant 0. \tag{1.8}$$

Для этого возьмем

$$W = W_0 + \sum_{j=1}^{m}[W_j + h_jW_{m+j}] \tag{1.9}$$

и построим соответствующий функционал (1.5). По построению

$$\frac{d\upsilon_0(x_t)}{dt} = -x^T(t)\left[W_0 + \sum_{j=1}^{m}[W_j + h_j W_{m+j}]\right]x(t), \quad t \geqslant 0.$$

Теорема 1. Пусть система (1.1) является экспоненциально устойчивой. Задан функционал (1.7). Тогда производная функционала

$$\upsilon(x_t) = \upsilon_0(x_t) + \sum_{j=1}^{m}\int_{-h_j}^{0} x^T(t+\theta)[W_j + (h_j+\theta)W_{m+j}]x(t+\theta)d\theta \tag{1.10}$$

вдоль решений системы равна $-\omega(x_t)$.

Равенство (1.10) можно переписать в виде

$$\upsilon(x_t) = x^T(t)U(0)x(t) + 2x^T(t)\sum_{j=1}^{m}\int_{-h_j}^{0} U(-\theta - h_j)A_j x(t+\theta)d\theta +$$
$$+\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\int_{-h_k}^{0} x^T(t+\theta_1)A_k^T\left[\int_{-h_j}^{0} U(\theta_1 + h_k - \theta_2 - h_j)A_j x(t+\theta_2)d\theta_2\right]d\theta_1 +$$
$$+\sum_{j=1}^{m}\int_{-h_j}^{0} x^T(t+\theta)[W_j + (h_j+\theta)W_{m+j}]x(t+\theta)d\theta. \tag{1.11}$$

Здесь $U(\tau)$ — матрица Ляпунова для системы (1.1), ассоциированная с матрицей (1.9).

О п р е д е л е н и е 4. Функционал (1.11) будем называть функционалом Ляпунова полного типа, если все матрицы $W_j > 0$, $j = 0, 1, \ldots, 2m$.

Таким образом, один из положительно-определенных функционалов, подходящих для анализа экспоненциальной устойчивости — функционал полного типа, допускающий квадратичную оценку снизу [5]. В построении такого функционала ключевую роль играет матрица Ляпунова [6].

1.3. Матрицы Ляпунова

Ранее было продемонстрировано, что матрицы Ляпунова играют ключевую роль в построении функционалов. В этом разделе рассмотрены основные свойства матрицы Ляпунова [6], из которых вытекает конструктивный метод её построения, не требующий вычисления фундаментальной матрицы. Далее, в разделе 1.5, рассмотрен пример построения матрицы Ляпунова с помощью данного метода.

Лемма 2. Пусть система (1.1) является экспоненциально устойчивой. Матрица Ляпунова (1.6) удовлетворяет условиям

$$U(\tau) = U^T(-\tau), \quad \tau \geqslant 0, \tag{1.12}$$

$$U'(\tau) = \sum_{j=0}^{m} U(\tau - h_j)A_j, \quad \tau \geqslant 0, \tag{1.13}$$

$$\sum_{j=0}^{m} \left[U(-h_j)A_j + A_j^T U^T(-h_j)\right] = -W. \tag{1.14}$$

Уравнение (1.12) называется свойством симметрии, уравнение (1.13) — динамическим свойством, а (1.14) — алгебраическим свойством.

Отметим, что под производной функции $U(\tau)$ в точке $\tau = 0$ понимается правая производная.

Приведенные в лемме свойства матрицы Ляпунова позволяют доказать следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть матрица $\widetilde{U}(\tau)$, $\tau \in [-h, h]$, удовлетворяет условиям (1.12)–(1.14). Определим функционал $\widetilde{v}_0(x_t)$ вида (1.5), где в качестве матрицы $U(\tau)$ использована матрица $\widetilde{U}(\tau)$. Производная этого функционала вдоль решений системы (1.1) совпадает с $-x^T(t)Wx(t)$.

Теорема 3. Если система (1.1) является экспоненциально устойчивой, то матрица $U(\tau)$, определенная формулой (1.6), — единственное решение системы (1.12)–(1.14).

Теорема 4. Пусть система (1.1) имеет собственные числа s_1, s_2, удовлетворяющие равенству $s_1 + s_2 = 0$. Тогда найдется симметрическая матрица W, для которой система (1.12)–(1.14) не имеет решения.

1.4. Алгоритм проверки положительной определенности квадратичного функционала

В этом разделе будем рассматривать скалярные уравнения с одним запаздыванием (2).

Для таких уравнений функционал $\upsilon_0(x_t)$, заданный формулой (1.5), имеет вид

$$\upsilon_0(x_t) = U(0)x^2(t) + 2bx(t)\int\limits_{-h}^{0} U(h+\theta)x(t+\theta)d\theta +$$

$$+b^2\int\limits_{-h}^{0}\int\limits_{-h}^{0} x(t+\theta_1)U(\theta_1-\theta_2)x(t+\theta_2)d\theta_2 d\theta_1.$$

А функционал $\upsilon(x_t)$, заданный формулой (1.10)

$$\upsilon(x_t) = \upsilon_0(x_t) + \int\limits_{-h}^{0} x^2(t+\theta)(W_1 + (h+\theta)W_2)d\theta. \qquad (1.15)$$

В работе [3] с помощью разбиения отрезка $[-h, 0]$ на N частей одинаковой длины $\Delta = \frac{h}{N}$ точками $-h = t_N < t_{N-1} < ... < t_0 = 0$, где $t_i = -i\Delta$, $i = \overline{0, N-1}$ найдена нижняя оценка $\upsilon_1(\widehat{x})$ функционала $\upsilon_0(x_t)$. Сделан вывод о том, что нижней оценкой этого функционала является квадратичная форма относительно вектора

$$\widehat{x} = \begin{pmatrix} \widehat{x}_0 \\ \widehat{x}_1 \\ \vdots \\ \widehat{x}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t_0) \\ x(t_1) \\ \vdots \\ x(t_N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ x(t-\Delta) \\ \vdots \\ x(t-N\Delta) \end{pmatrix}.$$

Коэффициенты этой квадратичной формы полностью определяются параметрами a, b, h уравнения (2). Согласно теореме 2, которая приведена в постановке задачи, положительная определенность полученной квадратичной формы гарантирует экспоненциальную устойчивость уравнения.

Также в работе [3] получена нижняя оценка функционала $\upsilon(x_t)$, которая является квадратичной формой относительно вектора $\widehat{x}$:

$$\upsilon(x_t) = \upsilon_1(\widehat{x}) + \upsilon_2(\widehat{x}),$$

здесь $\upsilon_1(\widehat{x})$ — нижняя оценка функционала $\upsilon_0(x_t)$, а $\upsilon_2(\widehat{x})$ — оценка второго слагаемого из (1.15).

Займемся теперь анализом положительной определенности функционала полного типа, преобразовав его к виду

$$\upsilon(x_t) = \upsilon_0(x_t) + W_1 \int\limits_{-h}^{0} x^2(t+\theta)d\theta + W_2 \int\limits_{-h}^{0} (h+\theta)x^2(t+\theta)d\theta. \qquad (1.16)$$

Для начала необходимо рассмотреть функционал $\upsilon_0(x_t)$, который является его неотъемлемой частью

$$\upsilon_0(x_t) = \left(\sqrt{U(0)}x(t) + \frac{b}{\sqrt{U(0)}} \int\limits_{-h}^{0} U(h+\theta)x(t+\theta)d\theta\right)^2 -$$

$$-\frac{b^2}{U(0)} \left(\int\limits_{-h}^{0} U(h+\theta)x(t+\theta)d\theta\right)^2 +$$

$$+b^2 \int\limits_{-h}^{0}\int\limits_{-h}^{0} x(t+\theta_1)U(\theta_1-\theta_2)x(t+\theta_2)d\theta_2 d\theta_1. \qquad (1.17)$$

Пусть I_3 — третье слагаемое (1.17).

Исследуем на положительную определенность I_3 . Его можно оценить несколькими способами.

Первый метод является грубой оценкой

$$I_3 = b^2 \int\limits_{-h}^{0}\int\limits_{-h}^{0} x(t+\theta_1)U(\theta_1-\theta_2)x(t+\theta_2)d\theta_2 d\theta_1 \geqslant$$

$$\geqslant b^2 \left(-\max_{\theta\in[-h,0]} |U(\theta)| \int\limits_{-h}^{0}\int\limits_{-h}^{0} |x(t+\theta_1)x(t+\theta_2)|d\theta_1 d\theta_2\right).$$

Так как

$$|x(t+\theta_1)x(t+\theta_2)| \leqslant \frac{1}{2}(|x(t+\theta_1)|^2 + |x(t+\theta_2)|^2),$$

имеет место оценка

$$I_3 \geqslant -\frac{1}{2}b^2 \max_{\theta\in[-h,0]} |U(\theta)| \left(\int_{-h}^{0}\int_{-h}^{0} \left[x^2(t+\theta_1) + x^2(t+\theta_2)\right] d\theta_1 d\theta_2 \right) =$$

$$= -\frac{1}{2}b^2 \max_{\theta\in[-h,0]} |U(\theta)| \int_{-h}^{0} x^2(t+\theta_1)d\theta_1 \int_{-h}^{0} d\theta_2 -$$

$$-\frac{1}{2}b^2 \max_{\theta\in[-h,0]} |U(\theta)| \int_{-h}^{0} x^2(t+\theta_2)d\theta_2 \int_{-h}^{0} d\theta_1 =$$

$$= -b^2 \max_{\theta\in[-h,0]} |U(\theta)| \cdot h \int_{-h}^{0} x^2(t+\theta)d\theta.$$

Второй метод основан на видоизменении матрицы Ляпунова. Определим на отрезке $[-h,h]$ матрицу $U(\theta)$ в виде ряда Фурье

$$U(\theta) = \sum_{s=0}^{\infty} \alpha_s \cos\left(\frac{\pi s}{h}\theta\right), \quad \theta \in [0,h]. \tag{1.18}$$

Здесь α_s — коэффициенты разложения.

$$\alpha_0 = \frac{1}{h}\int_0^h U(t)dt; \quad \alpha_s = \frac{2}{h}\int_0^h U(t)\cos\left(\frac{\pi s}{h}t\right)dt, \quad s = 1,2,3,....$$

Введенная функция $U(\theta)$ удовлетворяет свойству симметрии (1.12), динамическому свойству (1.13) и алгебраическому свойству (1.14).

Рассмотрим оценку I_3:

$$I_3 = b^2 \int_{-h}^{0}\int_{-h}^{0} x(t+\theta_1)U(\theta_1-\theta_2)x(t+\theta_2)d\theta_2 d\theta_1 =$$

$$= b^2 \sum_{s=0}^{\infty} \alpha_s \int_{-h}^{0} \int_{-h}^{0} x(t+\theta_1)x(t+\theta_2) \cos\left(\frac{\pi s}{h}(\theta_1 - \theta_2)\right) d\theta_2 d\theta_1.$$

По формуле косинуса разности аргументов:

$$\cos\left(\frac{\pi s}{h}(\theta_1 - \theta_2)\right) = \cos\left(\frac{\pi s}{h}\theta_1\right)\cos\left(\frac{\pi s}{h}\theta_2\right) + \sin\left(\frac{\pi s}{h}\theta_1\right)\sin\left(\frac{\pi s}{h}\theta_2\right).$$

Отсюда получаем, что

$$I_3 = b^2 \sum_{s=0}^{\infty} \alpha_s \left(\int_{-h}^{0} x(t+\theta_1) \cos\left(\frac{\pi s}{h}\theta_1\right) d\theta_1 \right)^2 +$$

$$+ b^2 \sum_{s=0}^{\infty} \alpha_s \left(\int_{-h}^{0} x(t+\theta_2) \sin\left(\frac{\pi s}{h}\theta_2\right) d\theta_2 \right)^2.$$

Таким образом, $I_3 \geqslant 0$ тогда и только тогда, когда $\alpha_s \geqslant 0$ для $\forall s \geqslant 0$.

Третий метод оценки I_3 заключается в минимизации нормы невязки.

Рассмотрим

$$\min_{\alpha \geqslant 0} \left\| U(\theta) - \alpha \cos\left(\frac{\pi s}{h}\theta\right) \right\|_h = \min_{\alpha \geqslant 0} \max_{|\theta| \leqslant h} \left| U(\theta) - \alpha \cos\left(\frac{\pi s}{h}\theta\right) \right|.$$

Пусть

$$\min_{\alpha \geqslant 0} \max_{|\theta| \leqslant h} \left| U(\theta) - \alpha \cos\left(\frac{\pi s}{h}\theta\right) \right| = d.$$

Для того, чтобы найти α и d, нужно решить задачу непрерывного минимакса. Заметим, что для поиска решения достаточно использовать функции системы MATLAB.

Оценку I_3 можно записать следующим образом

$$I_3 = b^2 \int_{-h}^{0} \int_{-h}^{0} x(t+\theta_1) U(\theta_1 - \theta_2) x(t+\theta_2) d\theta_2 d\theta_1 =$$

$$= b^2 \int\limits_{-h}^{0} \int\limits_{-h}^{0} x(t+\theta_1) \left(U(\theta_1 - \theta_2) - \alpha \cos\left(\frac{\pi s}{h}\theta\right)\right) x(t+\theta_2) d\theta_2 d\theta_1 +$$

$$+ b^2 \alpha \int\limits_{-h}^{0} \int\limits_{-h}^{0} x(t+\theta_1) \cos\left(\frac{\pi s}{h}\theta\right) x(t+\theta_2) d\theta_2 d\theta_1 \geqslant$$

$$\geqslant -db^2 h \int\limits_{-h}^{0} x^2(t+\theta) d\theta - b^2 \alpha h \int\limits_{-h}^{0} x^2(t+\theta) d\theta =$$

$$= -b^2 h (d+\alpha) \int\limits_{-h}^{0} x^2(t+\theta) d\theta.$$

Перейдем непосредственно к анализу положительной определенности функционала $\upsilon(x_t)$.

Из первого метода оценки следует, что

$$\upsilon(x_t) \geqslant \left(\sqrt{U(0)} x(t) + \frac{b}{\sqrt{U(0)}} \int\limits_{-h}^{0} U(h+\theta) x(t+\theta) d\theta \right)^2 -$$

$$- \frac{b^2}{U(0)} \left(\int\limits_{-h}^{0} U(h+\theta) x(t+\theta) d\theta \right)^2 -$$

$$- b^2 \max_{\theta \in [-h,0]} |U(\theta)| \cdot h \int\limits_{-h}^{0} x^2(t+\theta) d\theta + W_1 \int\limits_{-h}^{0} x^2(t+\theta) d\theta +$$

$$+ W_2 \int\limits_{-h}^{0} (h+\theta) x^2(t+\theta) d\theta.$$

Последнее слагаемое бесполезно в смысле оценки положительной определенности. Таким образом, для того, чтобы функционал $\upsilon(x_t)$ был положительно определен, достаточно, чтобы выполнялось условие

$$-b^2 h \max_{\theta \in [-h,0]} |U(\theta)| \left(1 + \frac{1}{U(0)} \max_{\theta \in [-h,0]} |U(\theta)| \right) + W_1 \geqslant 0.$$

Из второго метода следует, что

$$\upsilon(x_t) \geqslant \left(\sqrt{U(0)}x(t) + \frac{b}{\sqrt{U(0)}}\int\limits_{-h}^{0} U(h+\theta)x(t+\theta)d\theta\right)^2 -$$

$$-\frac{b^2}{U(0)}\left(\int\limits_{-h}^{0} U(h+\theta)x(t+\theta)d\theta\right)^2 +$$

$$+b^2\sum_{s=0}^{\infty}\alpha_s\left(\int\limits_{-h}^{0} x(t+\theta_1)\cos\left(\frac{\pi s}{h}\theta_1\right)d\theta_1\right)^2 +$$

$$+b^2\sum_{s=0}^{\infty}\alpha_s\left(\int\limits_{-h}^{0} x(t+\theta_2)\sin\left(\frac{\pi s}{h}\theta_2\right)d\theta_2\right)^2 + W_1\int\limits_{-h}^{0} x^2(t+\theta)d\theta +$$

$$+W_2\int\limits_{-h}^{0}(h+\theta)x^2(t+\theta)d\theta.$$

Для того, чтобы функционал $\upsilon(x_t)$ был положительно определен, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\alpha_s \geqslant 0, \quad -b^2h\frac{1}{U(0)}\left(\max_{\theta\in[-h,0]}|U(\theta)|\right)^2 + W_1 \geqslant 0.$$

Воспользовавшись оценкой из третьего метода, получим

$$\upsilon(x_t) \geqslant \left(\sqrt{U(0)}x(t) + \frac{b}{\sqrt{U(0)}}\int\limits_{-h}^{0} U(h+\theta)x(t+\theta)d\theta\right)^2 -$$

$$-\frac{b^2}{U(0)}\left(\int\limits_{-h}^{0} U(h+\theta)x(t+\theta)d\theta\right)^2 - b^2h(d+\alpha)\int\limits_{-h}^{0} x^2(t+\theta)d\theta +$$

$$+W_1\int\limits_{-h}^{0} x^2(t+\theta)d\theta + W_2\int\limits_{-h}^{0}(h+\theta)x^2(t+\theta)d\theta.$$

Таким образом, для того, чтобы функционал $\upsilon(x_t)$ был положительно определен, достаточно, чтобы выполнялось условие

$$-b^2 h\left[(d+\alpha)+\frac{1}{U(0)}\left(\max_{\theta\in[-h,0]}|U(\theta)|\right)^2\right]+W_1\geqslant 0.$$

1.5. Построение матрицы Ляпунова и анализ положительной определенности функционала на практике

В этом разделе приведем пример построения функционала Ляпунова для устойчивого дифференциального уравнения с запаздыванием, предварительно построив матрицу Ляпунова.

Будем рассматривать уравнение $\dot{x}(t)=-0.5x(t)+0.4x(t-1)$.

Корни характеристического квазиполинома $f(s)=s+0.5-0.4e^{-\lambda}$ имеют отрицательные вещественные части, а это значит, что выполнено необходимое и достаточное условие экспоненциальной устойчивости данного уравнения.

Положим в формуле (1.7) $W_0=W_1=W_2=1$ и $h=1$, тогда выбранный функционал будет иметь вид

$$\omega(x_t)=|x(t)|^2+|x(t-1)|^2+\int\limits_{-1}^{0}|x(t+\theta)|^2d\theta. \qquad (*)$$

Построим соответствующий функционал (1.5). По построению

$$\frac{dv_0(x_t)}{dt}=-3x^2(t),\quad t\geqslant 0.$$

Ставим задачу отыскания функционала $v(x_t)$ вида (1.10), производная которого вдоль решения (*) удовлетворяет равенству

$$\frac{dv(x_t)}{dt}=-\omega(x_t),\quad t\geqslant 0.$$

Для данного дифференциального уравнения система (1.12)–(1.14) будет иметь следующий вид

$$
\begin{cases}
U(\tau) = U(-\tau), \quad \tau \geqslant 0,\\
U'(\tau) = -0.5U(\tau) + 0.4U(\tau-1), \quad \tau \geqslant 0,\\
-U(0) + 0.8U(1) = -3.
\end{cases} \tag{**}
$$

Рассмотрим систему уравнений, составленную на основе второго уравнения системы (**)

$$
\begin{cases}
U'(\tau) = -0.5U(\tau) + 0.4U(\tau-1), \quad \tau \in [0,1],\\
\frac{dU(1-\tau)}{d\tau} = -\frac{dU(1-\tau)}{d(1-\tau)} = 0.5U(1-\tau) - 0.4U(\tau).
\end{cases} \tag{***}
$$

Положим $U(1-\tau) = U(\tau-1) = V(\tau)$. Тогда рассматриваемая система при $\tau \in [0,1]$ примет вид

$$
\begin{cases}
U'(\tau) = -0.5U(\tau) + 0.4V(\tau),\\
V'(\tau) = 0.5V(\tau) - 0.4U(\tau).
\end{cases} \tag{****}
$$

Для нахождения решения системы (****) будем использовать матричную экспоненту. В матричной форме эта система запишется в виде

$$
\begin{pmatrix} U(\tau) \\ V(\tau) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -0.5 & 0.4 \\ -0.4 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U(\tau) \\ V(\tau) \end{pmatrix}
$$

Вычислим собственные значения матрицы системы

$$
\begin{vmatrix} -0.5-s & 0.4 \\ -0.4 & 0.5-s \end{vmatrix} = s^2 - 0.09 = 0 \Rightarrow s_{1,2} = \pm\frac{3}{10}
$$

Пользуясь представлением матричной экспоненты, получаем

$$
\begin{cases}
e^{\frac{3}{10}\tau} = \varphi_0 + \frac{3}{10}\varphi_1;\\
e^{-\frac{3}{10}\tau} = \varphi_0 - \frac{3}{10}\varphi_1.
\end{cases}
$$

В результате несложных преобразований находим значения φ_0 и φ_1

$$
\begin{cases}
\varphi_0 = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{3}{10}\tau} + e^{-\frac{3}{10}\tau}\right);\\
\varphi_1 = \frac{5}{3}\left(e^{\frac{3}{10}\tau} - e^{-\frac{3}{10}\tau}\right).
\end{cases}
$$

Таким образом, решение системы (****) можно записать в виде

$$\begin{cases} U(\tau) = \frac{1}{3}\left(-e^{\frac{3}{10}\tau} + 4e^{-\frac{3}{10}\tau}\right)U(0) + \frac{2}{3}\left(e^{\frac{3}{10}\tau} - e^{-\frac{3}{10}\tau}\right)V(0); \\ V(\tau) = \frac{2}{3}\left(-e^{\frac{3}{10}\tau} + e^{-\frac{3}{10}\tau}\right)U(0) + \frac{1}{3}\left(4e^{\frac{3}{10}\tau} - e^{-\frac{3}{10}\tau}\right)V(0). \end{cases}$$

Воспользовавшись третьим уравнением системы (**) и вспомнив, что $V(\tau) = U(1-\tau)$, имеем

$$\begin{cases} U(1) = \frac{5}{4}(U(0) - 3); \\ V(1) = U(0). \end{cases}$$

Подставив найденные $U(1)$ и $V(1)$ в решение системы (****), получим значения $U(0)$ и $V(0)$.

Матрица Ляпунова для данного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами имеет вид

$$U(\tau) = 7.9417e^{-\frac{3}{10}\tau} + 2.9417e^{\frac{3}{10}\tau}.$$

Подставив $U(\tau)$ в систему (1.16), (1.17), получим искомый функционал

$$\begin{aligned} \upsilon(x_t) = -0.0147 \left(\int\limits_{-1}^{0} \left(7.9417e^{-\frac{3}{10}(1+\theta)} + 2.9417e^{\frac{3}{10}(1+\theta)}\right) x(t+\theta)d\theta \right)^2 + \\ + \left(3.3x(t) + 0.12 \int\limits_{-1}^{0} \left(7.9417e^{-\frac{3}{10}(1+\theta)} + 2.9417e^{\frac{3}{10}(1+\theta)}\right) x(t+\theta)d\theta \right)^2 + \\ +0.16 \int\limits_{-1}^{0}\int\limits_{-1}^{0} x(t+\theta_1)\left(7.9417e^{-\frac{3}{10}(\theta_1-\theta_2)} + 2.9417e^{\frac{3}{10}(\theta_1-\theta_2)}\right) \cdot \\ \cdot x(t+\theta_2)d\theta_2 d\theta_1 + \int\limits_{-1}^{0} x^2(t+\theta)d\theta + \int\limits_{-1}^{0}(1+\theta)x^2(t+\theta)d\theta. \end{aligned}$$

Таким образом, задача построения матрицы Ляпунова и квадратичного функционала решена.

Проверим положительную определенность построенного функционала. Будем использовать критерий, полученный во втором методе.

При разложении в ряд Фурье матрицы Ляпунова получаем, что $\forall$ коэффициент разложения $\alpha_s \geqslant 0$, а это значит, что третье слагаемое неотрицательно. Остальные слагаемые также не нарушают положительную определенность рассматриваемого функционала.

Глава 2. Линейные дифференциальные системы с линейно возрастающим запаздыванием

Класс дифференциальных уравнений с линейно возрастающим запаздыванием изучен меньше, чем класс уравнений с ограниченным переменным запаздыванием. Причиной этого является то, что в отличие от уравнений с ограниченным переменным запаздыванием предыстория решения уравнений с линейно возрастающим запаздыванием, влияющая на динамику в текущий момент времени, неограниченно возрастает с ростом времени. Из-за этого оказывается невозможно применять некоторые методы исследования.

В работе [7] исследованы свойства решений систем вида

$$\dot{x}(t) = \int\limits_{-h}^{0} d_\theta G(\theta) x(t+\theta),$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $G(\theta)$ — матрица ограниченной вариации на $[-h, 0]$.

Для дифференциально-разностных систем запаздывающего типа с ограниченным и распределенным запаздыванием остаются верными теоремы об устойчивости по линейному приближению [2, 8]. Там же приводится метод анализа устойчивости линейных стационарных дифференциально-разностных систем, основанный на преобразовании Лапласа.

Рассмотрим дифференциальную систему с линейно возрастающим запаздыванием вида

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(\alpha t). \tag{2.1}$$

Следует отметить, что данная система не являются стационарной, поэтому преобразование Лапласа оказывается неприменимым для анализа ее устойчивости и неустойчивости.

В работе [10] приведен метод, который позволяет свести задачу анализа устойчивости по Ляпунову для системы (2.1) к последовательному применению подхода Разумихина. Для таких систем получены достаточные условия асимптотической устойчивости и неустойчивости, которые приведены в разделе 2.1.

В работе [4] представлено распространение этого метода на системы с распределенным запаздыванием вида

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \int\limits_{\alpha}^{\beta} d_\nu G(\nu) x(\nu t),$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $0 < \alpha \leqslant \beta < 1$, $G(\nu)$ — матрица ограниченной вариации.

В работе [9] исследована устойчивость систем вида (2.1) с использованием метода функционалов. Для широкого класса устойчивых систем построен квадратичный функционал Ляпунова – Красовского, который пригоден для анализа устойчивости. Как известно, такой функционал находится через матрицу Ляпунова, для которой приведены основные свойства. Также показано, что после некоторых модификаций этот функционал может применяться для анализа устойчивости по отношению к нестационарным возмущениям в коэффициентах и в запаздывании.

Лемма 1 [9]. Решение $x(t, t_0, \varphi)$ системы (2.1) при $t \geqslant t_0$ может быть представлено в виде

$$x(t, t_0, \varphi) = K(t, t_0)\varphi(t_0) + \frac{1}{\alpha} \int\limits_{\alpha t_0}^{t_0} K(t, \frac{\tau}{\alpha}) B \varphi(\tau) d\tau.$$

Далее будем рассматривать дифференциальную систему вида

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-h) + Cx(\alpha t). \tag{2.2}$$

Заметим, что все используемые в данной главе определения аналогичны определениям из первой главы.

2.1. Анализ устойчивости

В данном разделе приведены овновные результаты работы [10].

О п р е д е л е н и е 1. Нулевое решение системы (2.1) устойчиво по Ляпунову, если для всякого числа $\varepsilon > 0$ и всякого начального момента времени $t_0 > 0$ можно указать такое число $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$, что для всякой начальной функции $\varphi(t)$, для которой выполняется условие $\|\varphi(t)\| < \delta$ при $t \in [\alpha t_0; t_0]$, решение системы (2.1) $x(t, t_0, \varphi)$ удовлетворяет условию $\|x(t, t_0, \varphi)\| < \varepsilon$ при всех значениях $t \geqslant t_0$. Если при этом число δ зависит только от числа ε, но не зависит от начального момента времени t_0, то система (2.1) будет равномерно устойчива.

О п р е д е л е н и е 2. Нулевое решение системы (2.1) асимптотически устойчиво по Ляпунову, если оно устойчиво по Ляпунову в смысле предыдущего определения, и для любого $t_0 > 0$ можно указать такое число $\delta_1 > 0$, что для всякой начальной функции $\varphi(t)$, для которой выполняется условие $\|\varphi(t)\| < \delta_1$ при $t \in [\alpha t_0; t_0]$, решение системы (2.1) $x(t, t_0, \varphi)$ удовлетворяет условию $\|x(t, t_0, \varphi)\| \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$.

О п р е д е л е н и е 3. Нулевое решение системы (2.1) неустойчиво по Ляпунову, если можно указать число $\varepsilon > 0$ и начальный момент времени $t_0 > 0$ такие, что для произвольно малого числа $\delta > 0$ найдется начальная функция $\varphi(t)$, для которой выполняется условие $\|\varphi(t)\| < \delta$ при $t \in [\alpha t_0; t_0]$, но при этом хотя бы в один момент времени $t_1 \geqslant t_0$ будет выполнено неравенство $\|x(t_1, t_0, \varphi)\| \geqslant \varepsilon$.

Теорема 1. Если все корни уравнений $det(\lambda E - A) = 0$ и $det(\lambda E + A^{-1} B e^{\lambda ln\alpha}) = 0$ имеют отрицательные вещественные части, то система (2.1) асимптотически устойчива.

Теорема 2. Если матрица A_0 имеет собственные числа с положительной вещественной частью и $det(A + B) \neq 0$, то система (2.1) неустойчива по Ляпунову.

Также имеет место теорема, которая является достаточным условием устойчивости для системы (2.2).

Теорема 3. Если выполняются утверждения

1) квазиполином $(\lambda E - A - B e^{-\lambda h})$ гурвицев,

2) квазиполином $(\lambda E + (A + B)^{-1} C e^{\lambda ln\alpha})$ гурвицев,

то система (2.2) асимптотически устойчива.

2.2. Фундаментальная матрица и ее свойства

Рассмотрим представление решения системы дифференциальных уравнений (2.2) в виде определенного интеграла.

Отметим, что в этом представлении особую роль играет фундаментальная матрица $K(t,t_0)$ системы (2.2), которая является решением матричного уравнения

$$\frac{\partial K(t,t_0)}{\partial t} = AK(t,t_0) + BK(t-h,t_0) + CK(\alpha t,t_0) \tag{2.3}$$

с начальными условиями

$$K(t,t_0) = \begin{cases} E_{n\times n}, & t = t_0, \\ 0_{n\times n}, & t < t_0. \end{cases}$$

Лемма 2. Решение $x(t,t_0,\varphi)$ при $t \geqslant t_0$ может быть представлено в виде

$$x(t,t_0,\varphi) = K(t,t_0)\varphi(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t_0+h} K(t,\theta)B\varphi(\theta-h)d\theta +$$
$$+ \int\limits_{t_0}^{\alpha^{-1}t_0} K(t,\tau)C\varphi(\alpha\tau)d\tau. \tag{2.4}$$

Лемма 3. Частная производная фундаментальной матрицы $K(t,t_0)$ по второму аргументу при $t \geqslant t_0$ удовлетворяет равенству

$$\frac{\partial K(t,t_0)}{\partial t_0} = -K(t,t_0)A - K(t,t_0+h)B - \alpha^{-1}K(t,\alpha^{-1}t_0)C.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\alpha t_0 < \Delta < \alpha(t_0+h) < t_0$. Рассмотрим $t \in [t_0, \alpha^{-1}t_0]$. Согласно (2.4) при $t \geqslant t_0$ будет выполняться равенство

$$K(t,\Delta) = K(t,t_0)K(t_0,\Delta) + \int\limits_{\alpha^{-1}\Delta}^{t_0+h} K(t,\theta)BK(\theta-h,\Delta)d\theta +$$

$$+\int\limits_{\alpha^{-1}\Delta}^{\alpha^{-1}t_0} K(t,\tau)CK(\alpha\tau,\Delta)d\tau.$$

Продифференцировав это выражение по t_0 и учитывая (2.3), имеем

$$0=\frac{\partial K(t,t_0)}{\partial t_0}K(t_0,\Delta)+K(t,t_0)\frac{\partial K(t_0,\Delta)}{\partial t_0}+K(t,t_0+h)BK(t_0,\Delta)+$$
$$+\alpha^{-1}K(t,\alpha^{-1}t_0)CK(t_0,\Delta)d\tau.$$

Таким образом, получаем

$$\frac{\partial K(t,t_0)}{\partial t_0}=-K(t,t_0)A-K(t,t_0+h)B-\alpha^{-1}K(t,\alpha^{-1}t_0)C.$$

Лемма доказана.

2.3. Функционал с заданной производной

Для системы (2.2) метод функционалов Ляпунова основывается на теореме Красовского, приведенной в первой главе. Необходимо построить функционал $v_0(t,x_t)$, удовлетворяющий условию

$$\frac{dv_0(t,x_t)}{dt}=-x^T(t)Wx(t), \tag{2.5}$$

где W — симметричная, положительно-определенная матрица.

Пусть система (2.2) асимптотически устойчива по Ляпунову и справедливо неравенство

$$\|K(t,t_0)\|\leqslant A\left(\frac{t_0}{t}\right)^{\nu}, \tag{5}$$

где $\nu>\frac{1}{2}$. Тогда *матрицей Ляпунова*, ассоциированной с матрицей W, будем называть

$$U(\tau_1,\tau_2)=\int\limits_{\max\{\tau_1,\tau_2\}}^{\infty} K^T(t,\tau_1)WK(t,\tau_2)dt. \tag{2.6}$$

В силу введенного обозначения и формулы (2.4), функционал $v_0(t,x_t)$ имеет вид

$$v_0(t,x_t) = x^T(t)U(t,t)x(t) + 2x^T(t)\int\limits_t^{t+h} U(t,\theta)Bx(\theta-h)d\theta +$$

$$+2x^T(t)\int\limits_t^{\alpha^{-1}t} U(t,\tau)Cx(\alpha\tau)d\tau +$$

$$+\int\limits_t^{t+h}\int\limits_t^{t+h} x^T(\theta_1-h)B^TU(\theta_1,\theta_2)Bx(\theta_2-h)d\theta_2 d\theta_1 +$$

$$+2\int\limits_t^{t+h}\int\limits_t^{\alpha^{-1}t} x^T(\theta-h)B^TU(\theta,\tau)Cx(\alpha\tau)d\tau d\theta +$$

$$+\int\limits_t^{\alpha^{-1}t}\int\limits_t^{\alpha^{-1}t} x^T(\alpha\tau_1)C^TU(\tau_1,\tau_2)Cx(\alpha\tau_2)d\tau_2 d\tau_1. \qquad (2.7)$$

Убедимся, что построенный функционал (2.7) удовлетворяет условию (2.5). Обозначим слагаемые в (2.7) через $J_1, J_2, J_3, J_4, J_5, J_6$ соответственно и продифференцируем их по t.

$$\frac{dJ_1}{dt} = 2[Ax(t) + Bx(t-h) + Cx(\alpha t)]^T U(t,t)x(t) +$$
$$+x^T(t)\left[-W - 2A^TU(t,t) - 2B^TU(t,t+h) - 2\alpha^{-1}C^TU(t,\alpha^{-1}t)\right]x(t).$$

$$\frac{dJ_2}{dt} = 2[Ax(t) + Bx(t-h) + Cx(\alpha t)]^T \int\limits_t^{t+h} U(t,\theta)Bx(\theta-h)d\theta +$$

$$+2x^T(t)\int\limits_t^{t+h} \frac{\partial U(t,\theta)}{\partial t}Bx(\theta-h)d\theta + 2x^T(t)U(t,t+h)Bx(t) -$$

$$-2x^T(t)U(t,t)Bx(t-h).$$

$$\frac{dJ_3}{dt}=2[Ax(t)+Bx(t-h)+Cx(\alpha t)]^T\int\limits_t^{\alpha^{-1}t}U(t,\tau)Cx(\alpha\tau)d\tau+$$

$$+2x^T(t)\int\limits_t^{\alpha^{-1}t}\frac{\partial U(t,\tau)}{\partial t}Cx(\alpha\tau)d\tau+2\alpha^{-1}x^T(t)U(t,\alpha^{-1}t)Cx(t)-$$

$$-2x^T(t)U(t,t)Cx(\alpha t).$$

$$\frac{dJ_4}{dt}=2x^T(t)B^T\int\limits_t^{t+h}U(t+h,\theta)Bx(\theta-h)d\theta-$$

$$-2x^T(t-h)B^T\int\limits_t^{t+h}U(t,\theta)Bx(\theta-h)d\theta.$$

$$\frac{dJ_5}{dt}=2x^T(t)B^T\int\limits_t^{\alpha^{-1}t}U(t+h,\tau)Cx(\alpha\tau)d\tau-$$

$$-2x^T(t-h)B^T\int\limits_t^{\alpha^{-1}t}U(t,\tau)Cx(\alpha\tau)d\tau+$$

$$+2\alpha^{-1}\int\limits_t^{t+h}x^T(\theta-h)C^TU(\theta,\alpha^{-1}t)d\theta\cdot Bx(t)-$$

$$-2\int\limits_t^{t+h}x^T(\theta-h)C^TU(\theta,t)d\theta\cdot Bx(\alpha t).$$

$$\frac{dJ_6}{dt}=2\alpha^{-1}x^T(t)C^T\int\limits_t^{\alpha^{-1}t}U(\alpha^{-1}t,\tau)Cx(\alpha\tau)d\tau-$$

$$-2x^T(\alpha t)C^T\int\limits_t^{\alpha^{-1}t}U(t,\tau)Cx(\alpha\tau)d\tau.$$

Таким образом, учитывая, что

$$\frac{\partial U(\tau_1,\tau_2)}{\partial \tau_1} = -A^T U(\tau_1,\tau_2) - B^T U(\tau_1+h,\tau_2) - \alpha^{-1} C^T U(\alpha^{-1}\tau_1,\tau_2),$$

при сокращении всех повторяющихся слагаемых получаем (2.5).

2.4. Матрица Ляпунова

Матрица $U(\tau_1,\tau_2)$ играет важную роль в построении функционала (2.7). Так как формула (2.6) неудобна для практического отыскания матрицы Ляпунова, необходимо ввести ее альтернативное определение.

О п р е д е л е н и е. Матрицей Ляпунова для системы (2.2) будем называть матрицу $U(\tau_1,\tau_2)$, удовлетворяющую следующим трем свойствам.

Лемма 4 (Свойство симметрии). Справедливо равенство

$$U^T(\tau_1,\tau_2) = U(\tau_2,\tau_1); \quad \tau_1 \geqslant 0, \tau_2 \geqslant 0.$$

Доказательство вытекает непосредственно из определения матрицы Ляпунова.

Лемма 5 (Динамическое свойство). При $\tau_1 > \tau_2$ и $\tau_1 < \tau_2$ выполняются равенства

$$\frac{\partial U(\tau_1,\tau_2)}{\partial \tau_2} = -U(\tau_1,\tau_2)A - U(\tau_1,\tau_2+h)B - \alpha^{-1}U(\tau_1,\alpha^{-1}\tau_2)C,$$

$$\frac{\partial U(\tau_1,\tau_2)}{\partial \tau_2} = -U(\tau_1,\tau_2)A - U(\tau_1,\tau_2+h)B - \alpha^{-1}U(\tau_1,\alpha^{-1}\tau_2)C - \\ -K^T(\tau_2,\tau_1)W.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим случай, когда $\tau_2 < \tau_1$.

$$\frac{\partial U(\tau_1,\tau_2)}{\partial \tau_2} = \frac{\partial}{\partial \tau_2}\left(\int_{\tau_1}^{\infty} K^T(t,\tau_1) W K(t,\tau_2)dt\right) =$$

$$= \int\limits_{\tau_1}^{\infty} K^T(t,\tau_1) W \frac{\partial K(t,\tau_2)}{\partial \tau_2} dt.$$

Воспользовавшись леммой 3, имеем

$$\frac{\partial U(\tau_1,\tau_2)}{\partial \tau_2} = -U(\tau_1,\tau_2)A - U(\tau_1,\tau_2+h)B - \alpha^{-1}U(\tau_1,\alpha^{-1}\tau_2)C.$$

Аналогично, рассматривая случай $\tau_2 > \tau_1$, получаем

$$\frac{\partial U(\tau_1,\tau_2)}{\partial \tau_2} = \frac{\partial}{\partial \tau_2}\left(\int\limits_{\tau_2}^{\infty} K^T(t,\tau_1) W K(t,\tau_2) dt\right) =$$
$$= -U(\tau_1,\tau_2)A - U(\tau_1,\tau_2+h)B - \alpha^{-1}U(\tau_1,\alpha^{-1}\tau_2)C - K^T(\tau_2,\tau_1)W.$$

Лемма доказана.

Лемма 6 (Алгебраическое свойство). Выполняется соотношение

$$\frac{dU(\tau,\tau)}{d\tau} = -W - A^T U(t,t) - U(t,t)A - B^T U(t+h,t) -$$
$$-U(t,t+h)B - \alpha^{-1}C^T U(\alpha^{-1}t,t) - \alpha^{-1}U(t,\alpha^{-1}t)C.$$

Доказательство.

$$\frac{dU(\tau,\tau)}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}\left(\int\limits_{\tau}^{\infty} K^T(t,\tau) W K(t,\tau) dt\right) =$$
$$= -W + \int\limits_{\tau}^{\infty} \frac{\partial K^T(t,\tau)}{\partial \tau} W K(t,\tau) dt + \int\limits_{\tau}^{\infty} K^T(t,\tau) W \frac{\partial K(t,\tau)}{\partial \tau} dt =$$
$$= -W - A^T U(t,t) - B^T U(t+h,t) - \alpha^{-1}C^T U(\alpha^{-1}t,t) -$$
$$-U(t,t)A - U(t,t+h)B - \alpha^{-1}U(t,\alpha^{-1}t)C.$$

Лемма доказана.

Заключение

Данная работа посвящена анализу положительной определенности линейных стационарных систем с постоянным запаздыванием. В ней использован подход, объединяющий метод Разумихина и метод функционалов Ляпунова – Красовского. Получены условия экспоненциальной устойчивости, основанные на оценке положительной определенности функционалов Ляпунова – Красовского на множестве функций, которые удовлетворяют аналогу условия Разумихина. Реализован алгоритм вычисления матрицы Ляпунова и проверки положительной определенности функционалов.

Также в данной работе рассмотрены линейные дифференциальные уравнения с постоянным и линейно возрастающим запаздываниями. Для них построен квадратичный функционал Ляпунова – Красовского, который может использоваться для анализа устойчивости и неустойчивости систем, если найдено решение системы уравнений, определяющих матрицу Ляпунова.

Список литературы

[1] Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971. 296 с.

[2] Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения / Пер. с англ. Под ред. Л. Э. Эльсгольца. М.: Мир, 1967. 548 с.

[3] Жабко А. П., Медведева И. В. Алгебраический подход к анализу устойчивости дифференциально-разностных систем // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2011. № 1. С. 9–20.

[4] Zhabko, A., Chizhova, O., Zaranik, U. Stability Analysis of the Linear Time Delay Systems with Linearly Increasing Delay // Cybernetics and Physics. VOL. 5, NO. 2, 2016 , 67–72.

[5] Харитонов В. Л. Функционалы Ляпунова с заданной производной. I. Функционалы полного типа // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2005. № 1. С. 110–117.

[6] Харитонов В. Л. Функционалы Ляпунова с заданной производной. II. Матрицы Ляпунова // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2005. № 2. С. 200–209.

[7] Зубов В. И. К теории линейных стационарных систем с запаздывающим аргументом // Известия ВУЗов. Математика. 1958. № 6. С. 86–95.

[8] Зубов В. И. Устойчивость движения. М.: Высшая школа, 1973. 272 с.

[9] Меденников И. П. Прямой метод анализа устойчивости систем с линейно возрастающим запаздыванием // Вестник Санкт-Петербургского

университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2014. № 3. С. 125–140.

[10] Жабко А. П.,Чижова О.Н. Гибридный метод анализа устойчивости линейных дифференциально-разностных систем с линейно возрастающим запаздыванием // Вестник ТГУ, 2015. т.20. вып.4. С. 843–850.

[11] Разумихин Б. С. Об устойчивости систем с запаздыванием // Прикладная математика и механика. 1956. Т. 20. Вып. 4. С. 500–512.

[12] Красовский Н. Н. О применении второго метода А.М.Ляпунова для уравнений с запаздыванием времени. // Прикладная математика и механика. 1956. Т. 20. С. 315–327.